

# Тема 8. Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных.

## §1. Основные понятия и определения.

**Определение 1.** Переменная величина  $Z$

называется функцией двух переменных  $x$  и  $y$ , если:

- задано множество  $D$  пар численных значений  $x$  и  $y$ ;
- задан закон, по которому каждой паре  $(x; y)$  из этого множества соответствует единственное значение функции  $Z$ .

$$z = f(x; y)$$

1)  $z = f(x; y)$  - явная

2)  $F(x; y; z) = 0$  - неявная

3)  $V_{\text{цилиндра}} = \pi r^2 h \Leftrightarrow V = V(r; h)$

4)  $z = ax_1 + bx_2 \Leftrightarrow z = z(x_1; x_2)$

– доход предприятия, где

$x_1$  – количество 1-ой продукции,

$x_2$  – количество 2-ой продукции,

$z$  –целевая функция.

5)  $u = f(x; y; z)$  – функция 3-х переменных

6)  $z = f(x_1; x_2; \dots x_n)$  – функция  $n$ -переменных

**Определение 2.** Множество  $D$  всех пар значений аргументов  $x$  и  $y$  функций  $z$ , при которых функция существует, называется **областью определения  $z$** .

**Определение 3.** Множество  $E$  значений функции  $z$  называется *областью изменения функции*.

Областью определения может быть вся плоскость или её часть, ограниченная некоторыми линиями.

Линию, ограничивающую область, называют *границей области*.

Точки области, не лежащие на границе, называются *внутренними*.

Область, состоящая из одних внутренних точек, называется *открытой*.

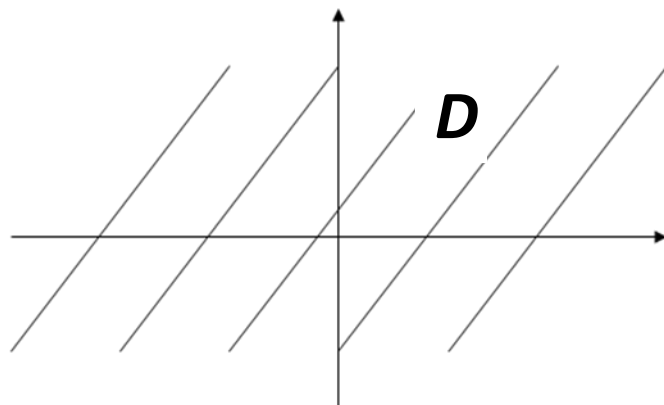
Область, с присоединенной к ней границей, называется *замкнутой*.

**Примеры:** Найти области определения следующих функций:

№1

$$z = x^2 + y^2$$

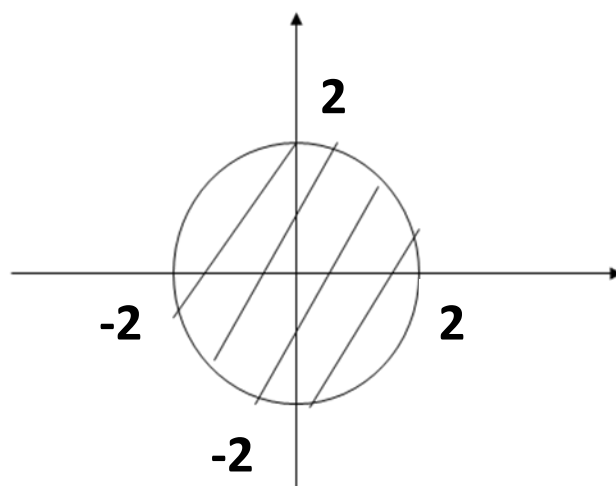
$$D: \begin{cases} -\infty < x < +\infty \\ -\infty < y < +\infty \end{cases}$$



**№2**

$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

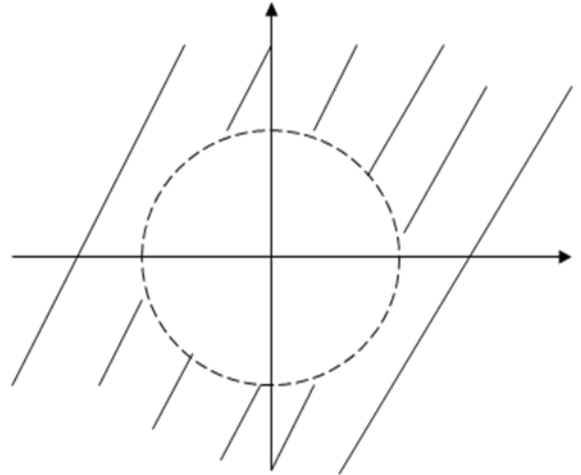
$$D: \begin{aligned} 4 - x^2 - y^2 &\geq 0 \\ x^2 + y^2 &\leq 4 \end{aligned}$$



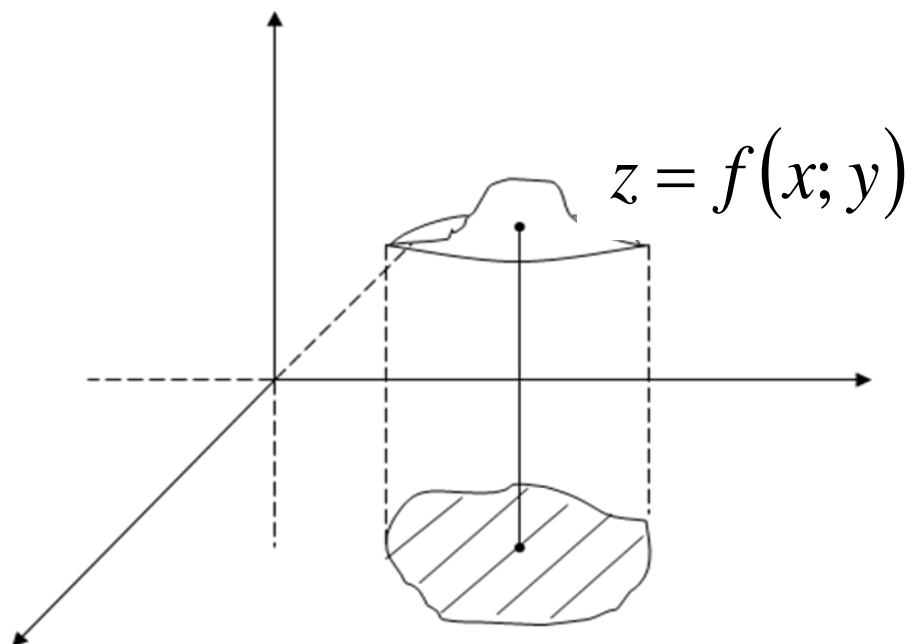
## №3

$$z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$$

$$D: \begin{aligned} x^2 + y^2 - 1 &> 0 \\ x^2 + y^2 &> 1 \end{aligned}$$



**Определение4.** Графиком функции  $z = f(x; y)$  называется множество точек в системе  $OXYZ$ , связанные зависимостью  $z = f(x; y)$  (в общем случае это какая-то поверхность).



**Замечание.** Для функции трех и более переменных геометрической интерпретации не существует.

## §2. Частные приращения и частные производные функции двух переменных

$$z = f(x; y)$$

Понятие непрерывности функции  $z = f(x; y)$  в точке  $M_0(x_0; y_0)$  дается аналогично этому понятию для функции одной переменной.

Определение 1. Функция  $z = f(x; y)$  называется непрерывной в точке  $M_0(x_0; y_0)$  если бесконечно малым приращениям  $\Delta x$  и  $\Delta y$  соответствует бесконечно малое приращение функции, т.е.

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta z = 0$$

Определение 2. Выражение

$$\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y)$$

называется полным приращением функции  $z$  (получено в результате приращения обоих аргументов).

Можно рассматривать частные приращения функции  $z$  при изменении только одного аргумента и фиксированном значении другого.

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x; y) - f(x; y) \quad .$$

частное приращение функции  $z$  по  $x$ , причем

$x$  - переменная

$y$  - const

Аналогично:

$$\Delta_y z = f(x; y + \Delta y) - f(x; y) \quad .$$

$x$  - const

$y$  – переменная

Определение 3. Частной производной функции  $z = f(x; y)$  по переменной  $x$  называется



**предел отношения частного приращения  $z$  по  $x$  к приращению аргумента, при стремлении последнего к нулю:**

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} = z'_x$$

**Аналогично:**

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y} = z'_y$$

- **частная производная функции  $z = f(x; y)$  по переменной  $y$ .**

$$\frac{\partial z}{\partial x} \rightarrow y = \text{const} ; \quad \frac{\partial z}{\partial y} \rightarrow x = \text{const}$$

**Все правила и формулы дифференцирования функции  $y = f(x)$  справедливы и для функции многих переменных.**

## Пример 1

$$z = x^2 + y^3 + 2x - 3y + 5$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{y=\text{const}} = 2x + 0 + 2 - 0 + 0 = 2x + 2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{x=\text{const}} = 0 + 3y^2 + 0 - 3 + 0 = 3y^2 - 3$$

## №2

$$z = x^y$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{y=\text{const}} = y \cdot x^{y-1} \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{x=\text{const}} = x^y \cdot \ln x$$

**Замечание.** Частные производные функции

$z = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$  определяются также в предположении, что меняется только одна из  $n$  - независимых переменных, а остальные являются *const*.

## Пример

$$z = x_1^2 + x_1 \cdot x_2^2 + 3x_3$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = 2x_1 + x_2^2$$
$$\left. \begin{matrix} x_2 \\ x_3 \end{matrix} \right\} \text{const}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_2} = 2x_1 \cdot x_2$$
$$\left. \begin{matrix} x_1 \\ x_3 \end{matrix} \right\} \text{const}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_3} = 3$$
$$\left. \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \right\} \text{const}$$

### §3. Полный дифференциал функции двух переменных.

Дифференциал функции  $y = f(x)$

определялся как главная, линейная относительно  $\Delta x$ , часть приращения функции, равная произведению  $y' \cdot \Delta x$ . Так как  $\Delta x = dx$ , то

$$dy = y' \cdot dx$$

Аналогично для функции 2-х переменных

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \Delta y$$

Дифференциалы независимых переменных

совпадают с их приращениями, т.е.  $\Delta x = dx$

и  $\Delta y = dy$ .

С учетом этого полный дифференциал функции

$z = f(x; y)$  вычисляется по формуле:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy$$

#### §4. Применение полного дифференциала в приближенных вычислениях.

Так как полный дифференциал  $dz$  есть главная часть полного приращения функции  $z = f(x; y)$ , то  $\Delta z \approx dz$ , т. е

$$f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y) \approx dz$$

**или**

$$f(x + \Delta x; y + \Delta y) \approx f(x; y) + dz \quad (1)$$

**Иначе можно записать:**

$$f(x + \Delta x; y + \Delta y) \approx f(x; y) + \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \quad (2)$$

Эта формула служит для приближенных вычислений функции.

**Пример 1:** Вычислить значение выражения  $(2,03)^{3,01}$

**Решение:** воспользуемся функцией  $z = x^y$ , тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot x^{y-1} \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \cdot \ln x$$

Пусть  $x=2$ , а  $\Delta x=0,03$

$y=3$ , а  $\Delta y=0,01$ , тогда

$$f(x; y) = x^y = 2^3 = 8$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{\substack{x=2 \\ y=3}} = 3 \times 2^2 = 12$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} \bigg|_{\substack{x=2 \\ y=3}} = 2^3 \times \ln 2 = 8 \ln 2$$

Подставим в формулу (2):

$$\begin{aligned} (2,03)^{3,01} &\approx 8 + 12 \cdot 0,03 + 8 \ln 2 \cdot 0,01 = 8 + 0,36 + 0,08 \cdot \ln 2 = \\ &= 8,36 + 0,08 \cdot 0,69 = 8,36 + 0,0492 \approx 8,41 \end{aligned}$$

**Пример 2:** Вычислить значение выражения:

$$\sqrt{(3,95)^2 + (3,02)^2}$$

**Решение:** Представим данную функцию в виде

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

**Тогда:**

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

**Пусть**  $x = 4$  , а  $\Delta x = -0,05$  , **тогда**  
 $y = 3$  , а  $\Delta y = 0,02$

$$f(x; y) = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{\substack{x=4 \\ y=3}} = \frac{4}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{4}{5} \quad \frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{\substack{x=4 \\ y=3}} = \frac{3}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{3}{5}$$

**Подставим в формулу (2):**

$$\begin{aligned} \sqrt{(3,95)^2 + (3,02)^2} &\approx 5 + \frac{4}{5} \cdot (-0,05) + \frac{3}{5} \cdot 0,02 = \\ &= 5 - 0,8 \cdot 0,05 + 0,6 \cdot 0,02 = \end{aligned}$$



$$= 5 - 0,04 + 0,012 = 4,96 + 0,012 = 4,972$$

## §5. Частные производные высших порядков.

Пусть дана функция  $z = f(x; y)$ , которая имеет частные производные 1-го порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x; y) \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x; y)$$

В свою очередь эти частные производные вновь являются функциями от  $x; y$  и их можно опять дифференцировать:

$$\left\{ \begin{array}{ll} (z'_x)'_x = z''_{xx} & \frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial x})}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \\ (z'_x)'_y = z''_{xy} & \frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial x})}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ (z'_y)'_x = z''_{yx} & \frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial y})}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \\ (z'_y)'_y = z''_{yy} & \frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial y})}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{array} \right.$$

**частные производные 2-го порядка**

**Определение 1.** Частные производные, взятые по разным переменным, называются **смешанными производными**.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \quad ; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} \quad \text{и т.д.}$$

**Определение 2.** Смешанные производные, отличающиеся друг от друга лишь порядком дифференцирования, равны между собой.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$$

**Пример:** Найти частные производные 2-го порядка

функции  $z = 5x^2 - 7y^3 + 2x - 3y + 6$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 10x + 2 ; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -21y^2 - 3$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 10 ; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0 ; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 0 ; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -42y$$

**Полный дифференциал функции 2-го порядка:**

$$z = f(x; y)$$

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot dx^2 + 2 \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \cdot dy^2$$

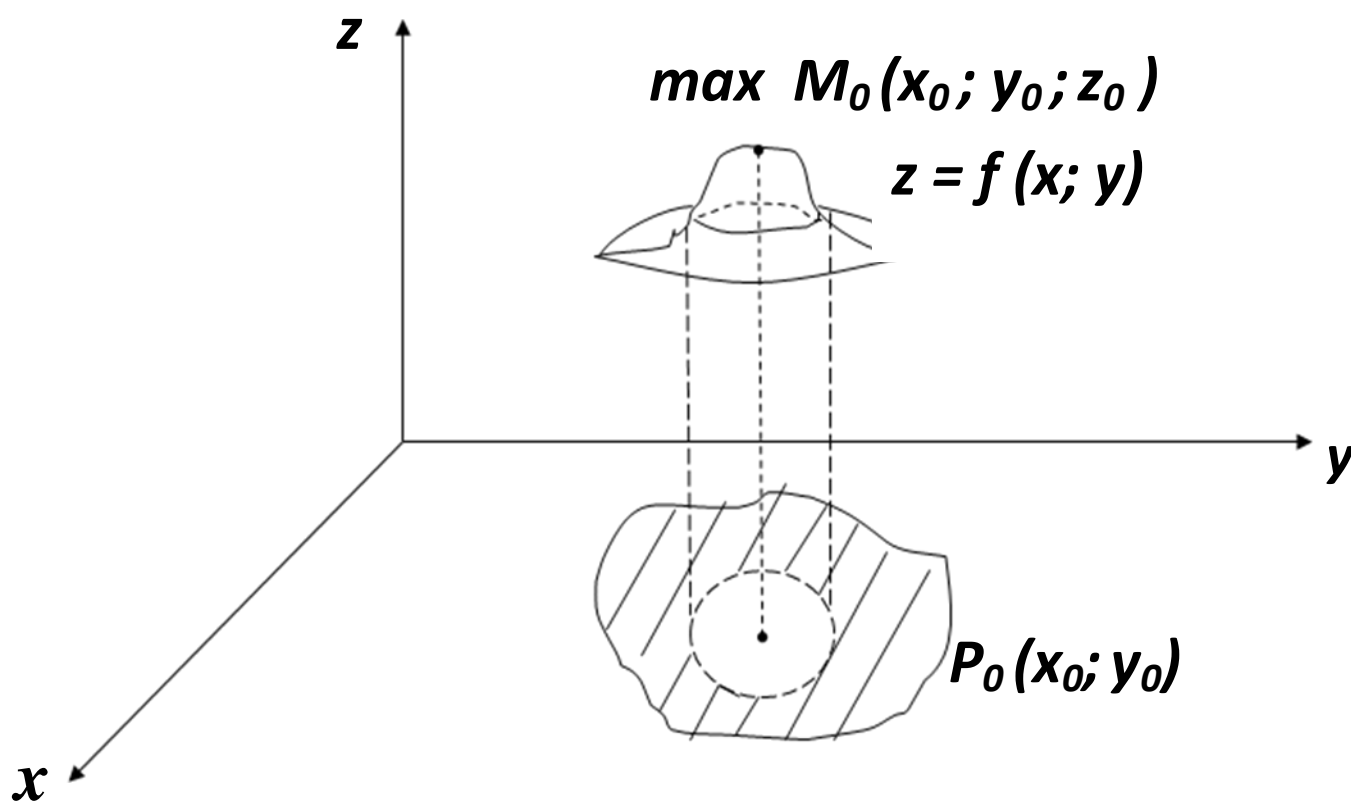
**Пример:** Найти полный дифференциал функции:

$$z = e^x \cdot (\cos y + x \sin y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^x (\cos y + x \sin y) + e^x \cdot \sin y \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = e^x (-\sin y + x \cos y)$$

$$dz = e^x (\cos y + x \sin y + \sin y) dx + e^x (x \cos y - \sin y) dy$$

## §6. Экстремум функции 2-х переменных



**Определение 1.** Функция  $z = f(x, y)$

имеет в точке  $P_0(x_0; y_0)$  максимум

(минимум), если существует такая окрестность

точки  $P_0$ , что для всех точек  $P(x, y) \in$

окрестности  $(P \neq P_0)$  выполняется неравенство:

$$f(P_0) > f(P) - \text{max}$$

$$f(P_0) < f(P) - \text{min}$$

Обращаем внимание на локальный характер экстремума функции, так как речь идет о максимальных и минимальных значениях лишь в достаточно малой окрестности точки  $P_0(x_0; y_0)$

Геометрически: над точкой  $P_0$  поверхность

$z = f(x; y)$  имеет точку  $M_0(x_0; y_0; z_0)$

лежащую выше (ниже) всех соседних.

### Необходимое условие существования экстремума.

Теорема. Если точка  $P_0(x_0; y_0)$  есть точка экстремума функции  $z = f(x; y)$ , то ее частные производные равны нулю или не существуют.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

**Определение 2.** Точки, в которых частные производные равны нулю или не существуют, называются *критическими*.

**Достаточный признак существования экстремума.**

Пусть функция  $z = f(x; y)$  имеет непрерывные частные производные 1-го и 2-го порядков в точке  $P_0(x_0; y_0)$ . **Введем обозначения:**

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad ; \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \quad ; \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

**Составим определитель 2-го порядка:**

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2, \text{ тогда:}$$

**1. Если**  $\Delta = AC - B^2 > 0$  , **то в точке**  $P_0(x_0; y_0)$   
**функция имеет экстремум, а именно:**

$\max$  , **если**  $A < 0$

$\min$  , **если**  $A > 0$

**2. Если**  $\Delta < 0$  , **то в точке**  $P_0$  **функция**  
**экстремума не имеет.**

**3. Если**  $\Delta = 0$  , **то требуются дополнительные**  
**исследования для ответа на вопрос о**  
**существовании экстремума в точке**  $P_0(x_0; y_0)$  .

**Пример 1:** Исследовать функцию на экстремум:

$$z = x^2 + y^2 + xy + x - y + 2$$



## Необходимое условие существования экстремума:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{y=\text{const}} = 2x + y + 1 \\ \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{x=\text{const}} = 2y + x - 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ 2y + x - 1 = 0 \\ 2x + y = -1 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-2 - 1}{4 - 1} = \frac{-3}{3} = -1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{2 + 1}{4 - 1} = \frac{3}{3} = 1$$

$P_0(-1; 1)$  - критическая точка, подозрительная на экстремум.

**Достаточное условие:**

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 \quad ; \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1 \quad ; \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0$$

экстремум есть, а так как  $\overline{A} = 2 > 0$  ,  
то  $\min$  .

$$z_{\min}(P_0) = (-1)^2 + 1^2 + (-1) \cdot 1 + (-1) - 1 + 2 = 1$$

$$\Rightarrow z_{\min}(-1; 1) = 1$$

**Пример 2: Исследовать функцию на экстремум**

$$z = -x^2 + y^2$$

**Необходимое условие:**

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = -2x \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2y \end{cases} \quad \begin{cases} -2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \quad P_0(0; 0)$$

$P_0(0;0)$  - критическая точка

Достаточное условие:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2 \quad ; \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0 \quad ; \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$$

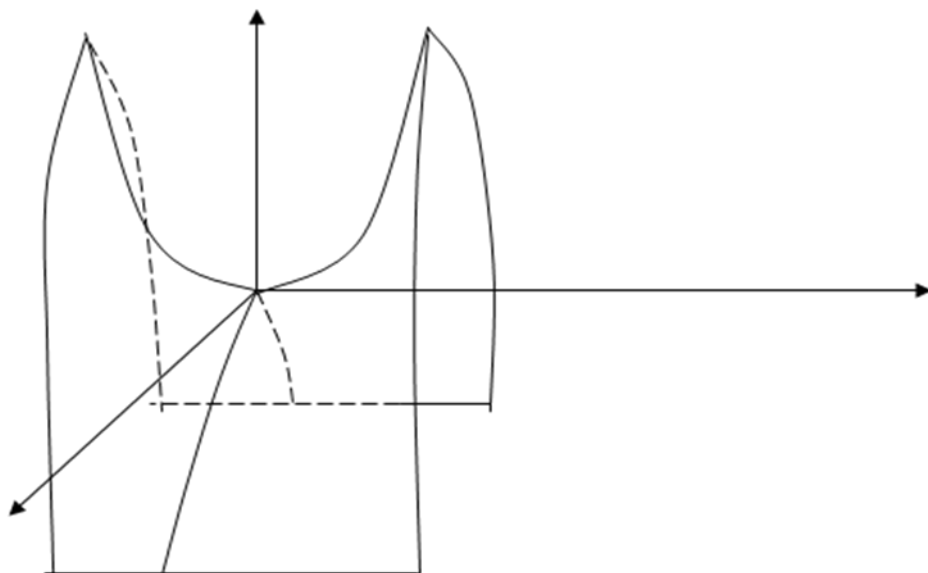
$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 < 0 - \text{экстремума нет}$$

Однако, если построить эту поверхность, то окажется, что в критической точке  $P_0(0;0)$  будет и *min* и *max*.

Такого вида точки называются точками минимакса.

Отметим, что достаточное условие рассматривается лишь для локального экстремума.

*Седловая поверхность*



## §7. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа.

Пусть надо найти экстремум функции  $z = f(x; y)$  при наличии определенных ограничений.

**Определение 1.** Условным экстремумом функции  $z = f(x; y)$  называется экстремум этой функции, определяемый для переменных  $x$  и  $y$ , связанных уравнением  $\varphi(x; y) = 0$  (уравнение связи).

Отыскание условного экстремума можно свести к исследованию на экстремум так называемой функции Лагранжа:

$$u = f(x; y) + \lambda \cdot \varphi(x; y)$$

где,  $\lambda$  – неопределенный постоянный множитель.

Необходимое условие существования экстремума функции Лагранжа, как функции трех переменных  $\lambda, x, y$  записывается в виде системы 3-х уравнений с тремя переменными:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Решая систему (1), находим критические точки, если они существуют. Проверка того являются ли они точками экстремума производится исследованием достаточных условий экстремума или следует из практического смысла задачи.

**Пример:** Найти экстремум функции  $z = 6 - 4x - 3y$

при условии, что  **$x$**  и  **$y$**  связаны уравнением  $x^2 + y^2 = 1$

**Решение:** 1) составим функцию Лагранжа:

$$u = f(x; y) + \lambda \cdot \varphi(x; y) \quad \text{т. е, если}$$

$$f(x; y) = 6 - 4x - 3y \quad \text{и}$$

$$\varphi(x; y) = x^2 + y^2 - 1, \text{ то}$$

$$u = 6 - 4x - 3y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

**1. Запишем необходимое условие экстремума функции  $u(x; y; \lambda)$**

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} -4 + 2\lambda x = 0 \\ -3 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2\lambda x = 4 \\ 2\lambda y = 3 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = \frac{4}{2x} = \frac{2}{x} \\ \lambda = \frac{3}{2y} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{3}{4}x \\ x = \pm \frac{4}{5} \\ \lambda = \pm \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \pm \frac{3}{5} \\ x = \pm \frac{4}{5} \\ \lambda = \pm \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{x} = \frac{3}{2y} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 4y = 3x \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{3}{4}x \\ x^2 + \frac{9}{16}x^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{3}{4}x \\ \frac{25}{16}x^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{3}{4}x \\ x^2 = \frac{16}{25} \end{cases}$$

**Получили две точки  $P_1\left(\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right)$  и  $P_2\left(-\frac{4}{5}; -\frac{3}{5}\right)$ , в которых подозревается существование экстремума функции  $z = f(x; y)$**

**1. Проверим достаточные условия существования экстремума в данных точках:**

**А) при  $\lambda_1 = \frac{5}{2}$  и  $P_1\left(\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right)$**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (-4 + 2\lambda x)'_x = 2\lambda$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = (-4 + 2\lambda x)'_y = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (-3 + 2\lambda y)'_y = 2\lambda \quad , \text{т.к.} \quad \lambda = \frac{5}{2}, \text{ то}$$

$$A = 5 \quad ; \quad B = 0 \quad ; \quad C = 5$$

**Составим**  $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 25 > 0$

**так как**  $A = 5 > 0$  , **то функция имеет**  $\min$

$$z_{\min} \left( \frac{4}{5}; \frac{3}{5} \right) = 6 - 4 \cdot \frac{4}{5} - 3 \cdot \frac{3}{5} = \frac{30 - 16 - 9}{5} = 1$$

**Б) при**  $\lambda = -\frac{5}{2} \quad P_2 \left( -\frac{4}{5}; -\frac{3}{5} \right)$

$$A = -5 \quad ; \quad B = 0 \quad ; \quad C = -5$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = 25 > 0$$

**так как**  $A = -5 < 0$  , **то -**  $\max$

$$z_{\max} \left( -\frac{4}{5}; -\frac{3}{5} \right) = 6 - 4 \left( -\frac{4}{5} \right) - 3 \left( -\frac{3}{5} \right) = \frac{30 + 16 + 9}{5} = \frac{55}{5} = 11$$



## §8. Метод наименьших квадратов.

### *Постановка задачи.*

В практическом применении математики очень часто встречается задача, когда зависимость между переменными величинами выражается в виде таблицы, полученной опытным путем. Это результаты экспериментов или данные наблюдений, статистической обработки материалов. Требуется выразить зависимость между переменными аналитически, т.е. в виде формулы.

**Определение 1.** Формулы, служащие для аналитического представления опытных данных называются **эмпирическими формулами**.

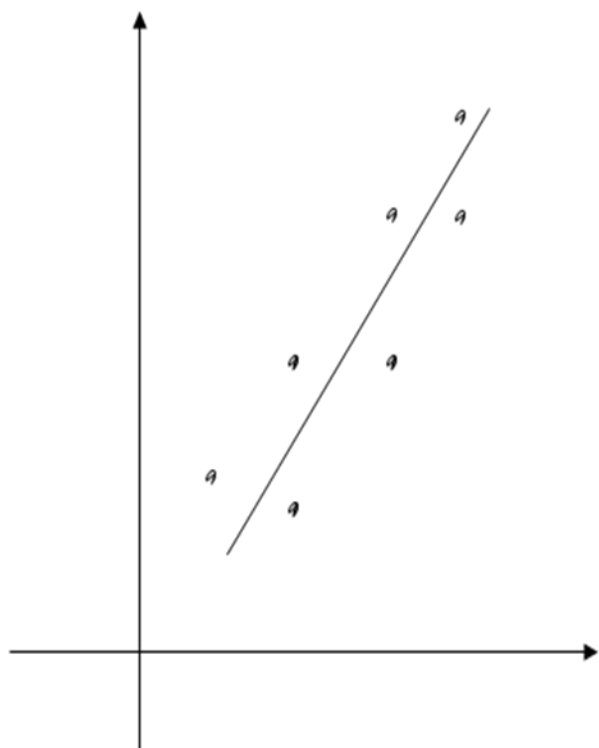
Чаще всего при подборе эмпирической формулы используют метод наименьших квадратов (МНК).

**Сущность метода:** из множества формул вида  $y = f(x)$ , наилучшим образом изображающих данные значения, лучшей считается та, для которой сумма квадратов отклонений наблюдаемых значений от вычисленных, является наименьшей.

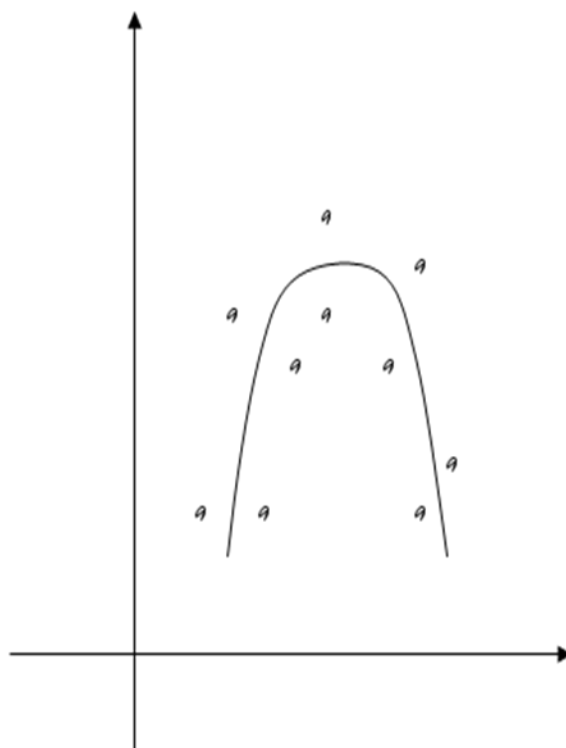
**Определение 2.** Подбор параметров зависимости  $y = f(x)$ , основанный на методе наименьших квадратов называется **МНК**

Применять этот метод можно только после того, как вид функции  $y = f(x)$  определен. Вид функции выбирают таким образом, чтобы график этой функции по возможности близко напоминал расположение на нем данных наблюдения, т.е. используют графический метод определения зависимости.

**Графический метод определения вида зависимости:**



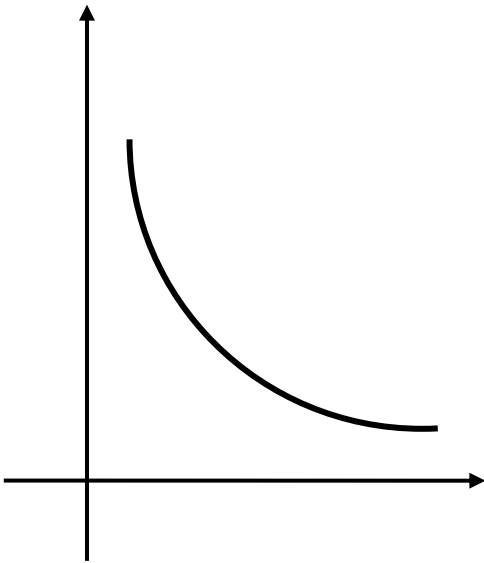
$$y = ax + b \text{ (линейная)}$$



$$y = ax^2 + bx + c \text{ (квадратическая, параболическая)}$$

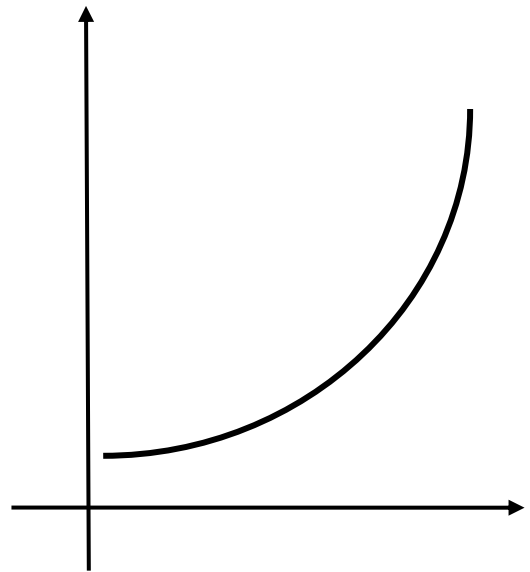
$$a = ? \quad b = ?$$

$$a = ? \quad b = ? \quad c = ?$$



$$y = \frac{a}{x} + b \quad (\text{гиперболическая})$$

$$a = ? \quad b = ?$$



$$y = b \cdot a^x \quad (\text{показательная})$$

$$a = ? \quad b = ?$$

Каждую пару данных изображают на плоскости точкой  $(x_i; y_i)$ . В теории вероятностей носит название - **факториальный признак,  $x$  - результативный признак.**

Например, в зависимости  $y = ax^2 + bx + c$

$x$  - количество осадков

$y$  - урожайность озимой пшеницы.

Чем больше факториальный признак, тем больше результативный (для возрастающей функции).

**Определение 1.** Ломаная, соединяющая точки  $(x_i; y_i)$  вида называется **ломаной регрессии**.

**Определение 2.** Уравнение называется  $y = f(x)$  уравнением связи между признаками.

## Отыскание параметров линейной зависимости по МНК.

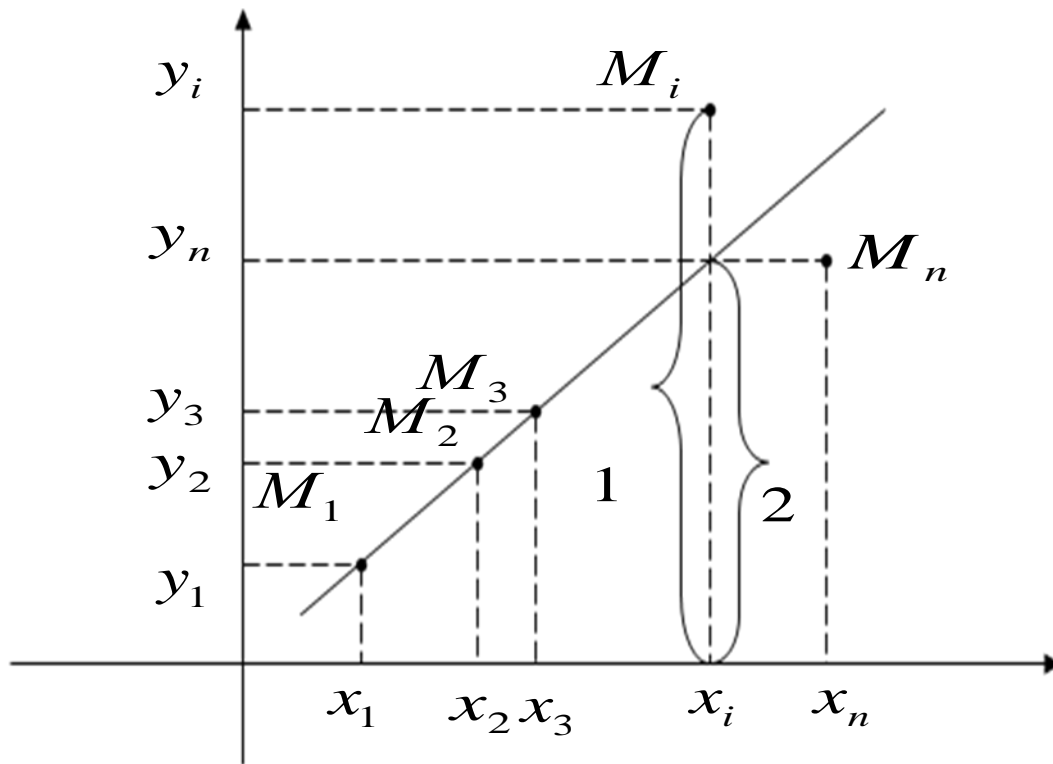
Пусть в результате некоторого эксперимента получены опытные данные:

$x$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\dots$	$x_i$	$\dots$	$x_n$
$y$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$\dots$	$y_i$	$\dots$	$y_n$

Графически определен вид связи - точки располагаются вдоль некоторой прямой.

$$\Rightarrow y = ax + b \quad \text{т. е.} \quad a = ? \quad b = ?$$

Параметры  $a$  и  $b$  будем определять так, чтобы сумма квадратов отклонений вычисленных значений от наблюдаемых принимала наименьшее значение.



1 — наблюдаемые значения

2 — вычисленные

$$S = (ax_1 + b - y_1)^2 + (ax_2 + b - y_2)^2 + (ax_3 + b - y_3)^2 + \dots$$

$$\dots + (ax_i + b - y_i)^2 + \dots + (ax_n + b - y_n)^2$$

$$S = \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2 \rightarrow \text{наименьшее}$$

**значение.**

Таким образом  $S = f(a; b)$ , - функция двух переменных. Данную функцию необходимо исследовать на экстремум. Для этого должно выполняться необходимое условие существования экстремума:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial b} = 0 \end{cases}$$

Найдем частные производные 1-го порядка функции  $S$  по переменным  $a$  и  $b$ .

$$S = \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2$$

$$\begin{cases} \frac{\partial s}{\partial a} = 2 \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i) \cdot x_i \\ \frac{\partial s}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i) \cdot 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i) \cdot x_i = 0 \\ 2 \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n (ax_i^2 + bx_i - x_i y_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n ax_i^2 + \sum_{i=1}^n bx_i - \sum_{i=1}^n x_i y_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n ax_i + \sum_{i=1}^n b - \sum_{i=1}^n y_i = 0 \end{cases}$$

$x_i$  - постоянная,  $a, b$  – переменные

Следовательно:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n ax_i^2 + \sum_{i=1}^n bx_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \sum_{i=1}^n ax_i + b \cdot n = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases}$$

Полученная система уравнений называется системой нормальных уравнений для отыскания параметров  $a$  и  $b$  линейной зависимости  $y = ax + b$  причем, чем больше данных наблюдений, т.е. чем больше пар вида  $(x_i; y_i)$ , тем точнее будут найдены  $a$  и  $b$ .

**Замечание.** В некоторых случаях по данным таблицы нельзя графически установить вид связи, тогда применять МНК нельзя. В этих случаях используют интерполяционные полиномы Ньютона и Лагранжа.

**Пример:** Выяснить зависимость между количеством внесенных удобрений и урожайностью некоторой культуры. В результате наблюдений были получены следующие данные:



**$x$**  - удобр./ ц/га

**$y$**  - урож./ ц/га

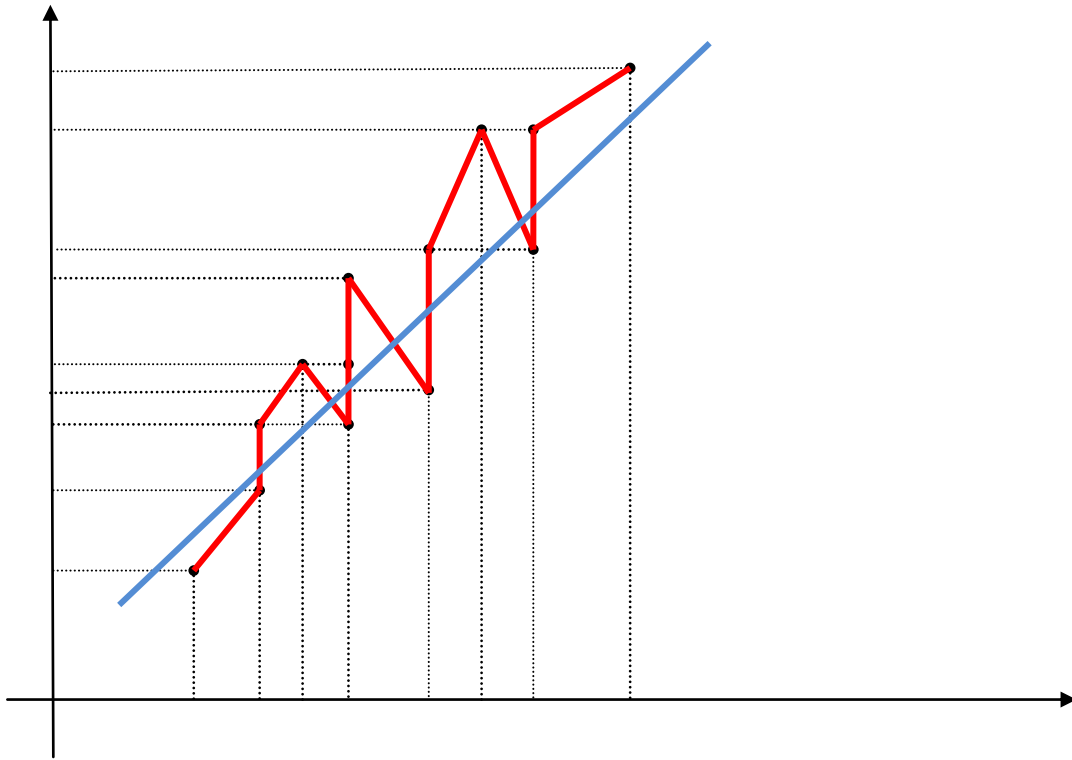
**Задание:** **1.** графически определить вид связи между признаками;

<b>x</b>	<b>4</b>	<b>9</b>	<b>9</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>8</b>	<b>10</b>	<b>4</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>3</b>	<b>7</b>	<b>6</b>	<b>6</b>
<b>y</b>	<b>7</b>	<b>12</b>	<b>13</b>	<b>10</b>	<b>10</b>	<b>13</b>	<b>14</b>	<b>8</b>	<b>11</b>	<b>12</b>	<b>6</b>	<b>9</b>	<b>8</b>	<b>9</b>

**2.**методом наименьших квадратов определить параметры зависимости;

**3.**построить ломанную регрессии и график полученной зависимости.

Решение: 1. Определим вид связи



Судя по ломаной регрессии можно сделать вывод, что зависимость между признаками линейная, т.е.  $y = ax + b$ , следовательно, по МНК будем находить параметры  $a$  и  $b$ . Воспользуемся системой нормальных уравнений для линейной зависимости:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n ax_i^2 + \sum_{i=1}^n bx_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \sum_{i=1}^n ax_i + b \cdot n = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases}$$

Для получения этой системы составим вспомогательную таблицу:

№ п/п	$x_i$	$y_i$	$x_i y_i$	$x_i^2$
1	4	7	28	16
2	9	12	108	81
3	9	13	117	81
4	5	10	50	25
5	6	10	60	36
6	8	13	104	64
7	10	14	140	100
8	4	8	32	16
9	6	11	66	36
10	7	12	84	49
11	3	6	18	9
12	7	9	63	49

13	6	8	48	36
14	6	9	54	36
$\Sigma$	92	142	994	662

**Составим систему нормальных уравнений:**

$$\begin{cases} 662a + 92b = 994 \\ 92a + 14b = 142 \end{cases}$$

**Решаем по формулам Крамера:**

$$a = \frac{\Delta_a}{\Delta} \quad ; \quad b = \frac{\Delta_b}{\Delta}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 662 & 92 \\ 92 & 14 \end{vmatrix} = 662 \cdot 14 - 92 \cdot 92 = 9268 - 8464 = 804$$

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} 994 & 92 \\ 142 & 14 \end{vmatrix} = 994 \cdot 14 - 142 \cdot 92 = 13916 - 13064 = 852$$

$$\Delta_b = \begin{vmatrix} 662 & 994 \\ 92 & 142 \end{vmatrix} = 662 \cdot 142 - 92 \cdot 994 = 94004 - 91448 = 2556$$

$$a = \frac{852}{804} \approx 1,06$$

$$b = \frac{2556}{804} \approx 3,18$$

Искомое уравнение имеет вид:

$$y = 1,06x + 3,18$$

Построим прямую, отображающую данную зависимость, по двум точкам:

$x$	$4$	$10$
$y$	$7,42$	$13,78$

Следовательно, прямая  $y = 1,06x + 3,18$  отражает зависимость урожайности культуры от количества внесенных удобрений.

Системы нормальных уравнений для квадратичной, показательной и гиперболической зависимостей.

Рассмотрим **квадратичную** зависимость:

$$y = ax^2 + bx + c \quad a = ? \quad b = ? \quad c = ?$$

**Составим сумму квадратов отклонений:**

$$S = \sum_{i=1}^n \left( a^2 x_i + b x_i + c - y_i \right)^2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial b} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial c} = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{- необходимые условия} \\ \text{существования экстремума} \end{array}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a} = 2 \sum_{i=1}^n \left( a x_i^2 + b x_i + c - y_i \right) \cdot x_i^2 = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^n \left( a x_i^2 + b x_i + c - y_i \right) \cdot x_i = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial c} = 2 \sum_{i=1}^n \left( a x_i^2 + b x_i + c - y_i \right) \cdot 1 = 0 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n \left( ax_i^4 + bx_i^3 + cx_i^2 - x_i^2 y_i \right) = 0 \\ \sum_{i=1}^n \left( ax_i^3 + bx_i^2 + cx_i - x_i y_i \right) = 0 \\ \sum_{i=1}^n \left( ax_i^2 + bx_i + c - y_i \right) = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n ax_i^4 + \sum_{i=1}^n bx_i^3 + \sum_{i=1}^n cx_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i \\ \sum_{i=1}^n ax_i^3 + \sum_{i=1}^n bx_i^2 + \sum_{i=1}^n cx_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \sum_{i=1}^n ax_i^2 + \sum_{i=1}^n bx_i + c \cdot n = \sum_{i=1}^n y_i \end{array} \right.$$

**Для получения данной системы необходимо составить вспомогательную таблицу:**

№ П/П	$x_i$	$y_i$	$x_i^2$	$x_i^3$	$x_i^4$	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
...							
$\Sigma$							

Гиперболическая зависимость:

$$y = \frac{a}{x} + b \quad a = ? \quad b = ?$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2} a + \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} b &= \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{x_i} \\ \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} a + nb &= \sum_{i=1}^n y_i \end{aligned} \right.$$



- система нормальных уравнений для отыскания параметров  $a$  и  $b$  для гиперболической зависимости.

**Показательная зависимость:**

$$y = a \cdot b^x \quad a = ? \quad b = ?$$

Прологарифмируем левую и правую части уравнения по основанию 10:

$$\lg y = \lg ab^x$$

$$\lg y = \lg a + \lg b^x$$

$$\lg y = \lg a + x \cdot \lg b$$

$$\lg a = ? \quad \lg b = ?$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \lg b + \sum_{i=1}^n x_i \cdot \lg a = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \lg y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i \cdot \lg b + n \cdot \lg a = \sum_{i=1}^n \lg y_i \end{cases}$$

**система нормальных уравнений для показательной зависимости.**